Neben der zweizeiligen Schreibweise der Permutationen gibt es die einzeilige *Zyklen-Schreibweise*, die nicht nur kürzer ist, sondern auch mehr Gruppenstruktur offenbart. Allerdings erfordert die Zyklen-Schreibweise etwas mehr Übung.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$$

Links steht: Auf 1 folgt 3, auf 2 folgt 1, auf 3 folgt 2,
rechts steht: Auf 1 folgt 3 folgt 2 folgt 1.
Bei der Zyklen-Schreibweise werden die Zahlen unmittelbar hintereinander geschrieben, die aufeinander folgen. Ist man am Ende des Zyklus angelangt, fängt man von vorn wieder an. Meist zerfallen die Permutationen in mehrere Zyklen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3) = (1\ 2)$$

Sprich: Auf 1 folgt 2 folgt 1. Auf 3 folgt 3.
Die Permutation besteht aus einem Zweier-Zyklus und aus einem Einer-Zyklus. Da Einer-Zyklen nichts permutieren, lässt man sie meistens weg. Deshalb brauchen wir für die Einheitspermutation ein besonderes Symbol:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = e$$

Um das Inverse zu bekommen, lässt man alle Zyklen rückwärts laufen:

$$(1\ 2\ 3)^{-1} = (3\ 2\ 1) = (1\ 3\ 2) \quad \text{und} \quad ((1\ 2)(3))^{-1} = (2\ 1)(3) = (1\ 2)(3)$$

Die letzten Gleichheitszeichen sind richtig, weil sich Zyklen bei zyklischen Vertauschungen nicht ändern; man nutzt dies, um die kleinste Ziffer an die erste Stelle hinter der Klammer zu bringen; nach Konvention ist das die Normalform.

Die Multiplikation folgt dem bekannten *auf a folgt b*. Dabei fängt man mit der Permutation an, die neben dem Gleichheitszeichen steht:

$$(1\ 3) \cdot (1\ 2) = (1\ 3)(2) \cdot (1\ 2)(3) = (1\ 2\ 3)$$

lies:

Auf 1 folgt 2, auf 2 folgt 2. Insgesamt: Auf 1 folgt 2.
Auf 2 folgt 1, auf 1 folgt 3. Insgesamt: Auf 2 folgt 3.
Auf 3 folgt 3, auf 3 folgt 1. Insgesamt: Auf 3 folgt 1.

Noch ein Beispiel:

$$(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2) = (1)(2)(3) = e$$

Diese beiden Beispiele wurden in zweizeiliger Schreibweise auf S.4 unten vorgeführt.

Um Ähnlichkeitstransformationen $\ddot{a} = bab^{-1}$ auszuführen, ersetzt man in a alle Zahlen so, wie es b vorschreibt:

$$b = (1\ 2) = (1\ 2)(3) \quad \text{und} \quad a = (1\ 2\ 3) \quad \text{ergibt} \quad \ddot{a} = (2\ 1\ 3) = (1\ 3\ 2)$$

Sprich:
Ersetze 1 durch 2,
Ersetze 2 durch 1,
Ersetze 3 durch 3.
a und $\ddot{a}$ sind beide Dreierzyklen. Aus der Methode folgt allgemein, dass *Ähnlichkeitstransformationen die Zyklenstruktur* nicht verändern.

Wenn die StudentInnen mit der Gruppentheorie etwas anfangen wollen, müssen sie mit Permutationen mühelos rechnen können:
1) Zweizeilen-, Zyklen-Schreibweise und ihre gegenseitige Umwandlung,
2) Multiplikation in beiden Schreibweisen,
3) Bildung des Inversen in beiden Schreibweisen,
4) Ähnlichkeitstransformationen i.b.S.

Hält man in $\ddot{a} = gag^{-1}$ a fest und lässt g durch die ganze Gruppe laufen, bekommt man die *Ähnlichkeitsklasse* von a. Natürlich gehört a wegen $a = eae^{-1}$ zur eigenen Ähnlichkeitsklasse. Um die Ähnlichkeitsklassen der symmetrischen Gruppen S_n zu finden, müssen wir gar nicht rechnen. Da Ähnlichkeitstransformationen die Zyklenstrukturen bestehen lassen, sind nur die Strukturen aufzuzählen. Z.B. finden wir in

$$S_3 = \{e = (1)(2)(3), (1\ 2)(3), (1\ 3)(2), (2\ 3)(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

die Klassen

$$(.)(.)(.) = e \quad \text{und} \quad (..)(.) = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\} \quad \text{und} \quad (...) = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

Vergleichen Sie dies mit den Untergruppen von S_3 auf S.5.

Wir haben somit zwei Konzepte, um Gruppen zu strukturieren:
a) Untergruppen,
b) Ähnlichkeitsklassen.
Nur wenn beide Konzepte zusammenpassen, können wir algebraische Gleichungen lösen. Ein *Normalteiler ist eine Untergruppe, die aus Ähnlichkeitsklassen besteht*. Man kann dies auch so sagen: Ein Normalteiler ist eine sich selbst ähnliche Untergruppe:

$$N = \{n = g\tilde{n}g^{-1} | \forall\, \tilde{n} \in N \wedge \forall\, g \in G\}$$

oder kurz $N = gNg^{-1}$. Die Abbildung einer Gruppe auf sich selbst wird übrigens als *Automorphismus* bezeichnet.

Die Normalteiler in S_3 sind e und A_3.

Sobald ein Normalteiler vorhanden ist, kann die Gruppe mit dem Normalteiler in *Nebenklassen* $K = kN = Nk$ unterteilt werden, wobei k irgendein Element der Nebenklasse bedeutet. Natürlich gehört k zur eigenen Nebenklasse, weil das Einheitselement e im Normalteiler enthalten ist. Die Nebenklassen dürfen nicht mit den Ähnlichkeitsklassen verwechselt werden.

Für S_3 haben wir als Normalteiler

$$A_3 = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

und als Nebenklasse

$$(1\ 2) \cdot A_3 = \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}.$$

Es ist sehr wichtig, dass die Nebenklasse durch jedes ihrer Elemente erzeugt werden kann. Es darf auch nicht darauf ankommen, ob man mit dem erzeugenden Element von rechts oder links[1] an den Normalteiler multipliziert. Beispielsweise ist

$$A_3 \cdot (2\ 3) = \{(2\ 3), (1\ 2), (1\ 3)\}.$$

Die Nebenklasse ist dieselbe. Nur die Reihenfolge ihrer Elemente hat sich geändert.

Dass rechte und linke Nebenklassen übereinstimmen, ist eine Spezialität des Normalteilers. Nehmen wir als Untergruppe $T_3 = \{e, (1\ 2)\}$, die kein Normalteiler ist, finden wir als rechte Nebenklassen

$$T_3(1\,3) = T_3(1\,3\,2) = \{(1\,3), (1\,3\,2)\} \quad \text{und} \quad T_3(2\,3) = T_3(1\,2\,3) = \{(2\,3), (1\,2\,3)\}.$$

Dagegen sind die linken Nebenklassen:

$$(1\,3)T_3 = (1\,2\,3)T_3 = \{(1\,3), (1\,2\,3)\} \quad \text{und} \quad (2\,3)T_3 = (1\,3\,2)T_3 = \{(2\,3), (1\,3\,2)\}.$$

Hier geht es nicht um unterschiedliche Reihenfolgen. Rechte und linke Nebenklassen sind miteinander völlig unverträglich.

Die von einem Normalteiler erzeugten rechten und linken Nebenklassen stimmen überein. Umgekehrt folgt aus der Übereinstimmung der rechten und linken Nebenklassen, dass sie von einem Normalteiler erzeugt worden sind.

[1] Lechts und rinks
kann man nicht velwechsern.
Werch ein Illtum.

Der Beweis folgt sofort aus der Definition des Normalteilers $N = gNg^{-1}$. Da g ein beliebiges Element der Gruppe ist, können wir $g = k^{-1}$ setzen, woraus $N = k^{-1}Nk$ oder $kN = Nk$ folgt. Die Reihe der Gleichungen ist umkehrbar, womit die Behauptung bewiesen ist.

Die Unterteilung der Gruppe mit dem Normalteiler gestattet eine ungeheure Vereinfachung der Gruppenmultiplikation. Man ordnet dem gesamten Normalteiler und den gesamten Nebenklassen je ein Element einer neuen, kleineren Gruppe zu:

$$A_3 = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \to E \quad \text{und} \quad (1\ 2)A_3 = \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\} \to I.$$

Die neue *Quotienten-Gruppe* G/N, leider oft *Faktor-Gruppe* genannt, hat hier nur zwei Elemente:

$$S_3/A_3 = \{E, I\} \quad \text{mit den Produkten} \quad EE = E,\ II = E,\ EI = IE = I,$$

E hat die Eigenschaften des Einheitselement, während I sich als Selbst-Inverses entpuppt.

Die Multiplikationsregeln der Quotientengruppe folgen aus denen der ursprünglichen Gruppe. Z.B.

$(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2)$ repräsentiert $EE = E$,
$(1\ 3\ 2)(1\ 2) = (2\ 3)$ repräsentiert $EI = I$,
$(1\ 3)(2\ 3) = (1\ 3\ 2)$ repräsentiert $II = E$ usw.

Es kommt nicht darauf an, welche Repräsentanten wir aus Normaltteiler und Nebenklasse wählen. Im Grund bleiben die Multiplikationsregeln der ursprünglichen Gruppe erhalten. Sie werden durch die Normalteilung nur vergröbert. Die Abbildung von G auf G/N wird darum als *Homomorphismus* bezeichnet.

Dagegen besitzen die Quotientengruppe $S_3/A_3 = \{E, I\}$ und die symmetrische Gruppe zweier Elemente $S_2 = \{e, (1\ 2)\}$ haargenau dieselben Multiplikationsregeln. Man spricht dann von einem *Isomorphismus* und schreibt $S_3/A_3 \cong S_2$.

Unter dem *Index eines Normalteilers N in G* versteht man die *Mächtigkeit der Quotientengruppe* $|G/N| = |G|/|N|$. Im vorliegenden Fall gilt $|S_3/A_3| = 2 = |S_3|/|A_3| = 6/3$. Selbstverständlich ist 2 eine *Primzahl.*

Mit diesen Erkenntnissen können wir die Lösung der Gleichung dritten Grades fördern. Die sogenannte *Diskriminante*

$$b_1 = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1), \qquad Eb_1 = b_1, \qquad Ib_1 = -b_1$$

bleibt unverändert, wenn irgendeine Permutation aus dem Normalteiler A_3 auf sie angewendet wird. Dagegen nimmt sie den entgegengesetzten Wert an, sobald sie irgendeine Permutation aus der Nebenklasse erleidet.