Anders als die symmetrischen Funktionen unterscheidet also die Diskriminante zwischen zwei Teilmengen der symmetrischen Gruppe. Die Symmetrie wird zum ersten Mal gebrochen. Und es kommt sehr darauf an, dass die Brechung möglichst geringfügig ist.

Statt die Diskriminante aus dem Hut zu zaubern, soll das allgemeine Verfahren angewendet werden, mit dem sich solche *symmetriegerechten Funktionen* konstruieren lassen. Man wählt aus den *Monomen* x_1, x_1x_2, $x_1^2x_2$ usw. das einfachste aus, dessen Summe

$$\sum_{g\in N} g\ x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$$

nur auf dem Normalteiler N invariant bleibt, auf den Nebenklassen aber unterschiedliche Werte annimmt.

Z.B. ist x_1 ungeeignet, denn

$$e\ x_1 + (123)x_1 + (132)x_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -a_2$$

ist eine auf der ganzen Gruppe S_3 invariante Funktion, ja sogar eine symmetrische Grundfunktion. Gleiches gilt für x_1x_2

$$e\ x_1x_2 + (123)x_1x_2 + (132)x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a_1$$

Erst $x_1^2x_2$ liefert

$$e\ x_1^2x_2 + (123)x_1^2x_2 + (132)x_1^2x_2 = x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 = \beta_1$$

einen Wert, der unter den Permutationen $e, (123), (132)$ des Normalteilers A_3 fest bleibt, dagegen unter den Permutationen der Nebenklasse $(12), (13), (23)$ den anderen Wert

$$(12)\beta_1 = (13)\beta_1 = (23)\beta_1 = x_1^2x_3 + x_3^2x_2 + x_2^2x_1 = \beta_2$$

annimmt. Die symmetriegerechte Funktion bekommt man, indem mit den *Einheitswurzeln* der Gleichung $\epsilon^2 = 1$, also $\epsilon_1 = +1$, $\epsilon_2 = -1$, die Summe

$$b_1 = \epsilon_1\beta_1 + \epsilon_2\beta_2 = x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 - x_1^2x_3 - x_3^2x_2 - x_2^2x_1$$

gebildet wird. Wie man durch Ausmultiplizieren ausrechnet, ist diese Funktion der Diskriminante gleich. Wir brauchen die Einheitswurzeln von $\epsilon^2 = 1$, weil 2 der Index von A_3 in S_3 ist, siehe S.10.

Beim Übergang vom Normalteiler auf die Restklasse ändert b_1 nur sein Vorzeichen. b_1^2 ist darum eine symmetrische Funktion und lässt sich deshalb aus den symmetrischen Grundfunktionen berechnen. Dies gelingt mit dem Verfahren von Waring.

Bei Ausmultiplizieren von b_1^2 kommt es auf strikte Ordnung an. Zuerst nehmen wir alle Terme, in denen die höchsten Einzelpotenzen vorkommen, also $x_1^4x_2^2$, $x_1^4x_3^2$, $x_2^4x_3^2$ usw. Danach kommen die Terme, in denen die niedrigste Einzelpotenz abgesenkt ist, z.B. $x_1^4x_2x_3$. Als drittes bleibt nichts mehr übrig, als auch die höhere Einzelpotenz abzusenken; dafür wird aber die niedrigste Einzelpotenz so hoch wie möglich angesetzt. Insgesamt ergibt sich eine Entwicklung der Form

$$b_1^2 = A\sum x_1^4x_2^2 + B\sum x_1^4x_2x_3 + C\sum x_1^3x_2^3 + D\sum x_1^3x_2^2x_3 + E\sum x_1^2x_2^2x_3^2$$

Unter den Summen ist hier das Zusammenzählen aller Terme mit gleicher Potenz-Struktur zu verstehen, denn b_1^2 ist eine symmetrische Funktion.

Noch anschaulicher wird das Prinzip der Ordnung, wenn wir *Young-Rahmen* verwenden:

$$b_1^2 = A\cdot\yng(4,2) + B\cdot\yng(4,1,1) + C\cdot\yng(3,3) + D\cdot\yng(3,2,1) + E\cdot\yng(2,2,2)$$

In jeder Reihe eines solchen Rahmens ist die Zahl der Kästchen der Potenz gleich: vier Kästchen bedeuten x_1^4, x_2^4 oder x_3^4, zwei Kästchen bedeuten x_1^2, x_2^2 oder x_3^2 usw., wobei jeder Variablen-Name nur in einer Reihe vorkommen darf. Die Terme werden so geordnet, dass möglichst viele Kästchen möglichst lange möglichst weit oben bleiben. Stellen Sie sich die Kästchen wie Luftblasen vor, die im Wasser möglichst weit nach oben steigen wollen. Auch wird bei den Young-Rahmen die Symmetrie deutlicher als bei der Summen-Schreibweise: x_1, x_2, x_3 sind gleichberechtigt.

Jedenfalls hat die Ordnung den Vorteil, dass wir, um die Koeffizienten A, B, C, D, E auszurechnen, nur den Faktor vor jeweils einem Repräsentanten bestimmen müssen. Die Ersparnis an Rechenarbeit ist gewaltig. Simples Ausmultiplizieren von b_1^2 ergibt $A = 1, B = -2, C = -2, D = 0, E = -6$.

Die Young-Rahmen zeigen außerdem, wie wir die jeweils höchsten Terme mit den symmetrischen Grundfunktionen abrahmen können. Zum Beispiel stehen im Diagramm $\yng(4,2)$ in der obersten Reihe 2 Kästchen über, und in der zweitobersten Reihe stehen 2 Kästchen mehr als der unteren, wo sich hier kein Kästchen findet. Wir berechnen darum

$$a_2^2a_1^2 = (x_1+x_2+x_3)^2(x_1x_2+x_3x_1+x_2x_3)^2 = 1\cdot\yng(4,2)+2\cdot\yng(4,1,1)+2\cdot\yng(3,3)+6\cdot\yng(3,2,1)+15\cdot\yng(2,2,2)$$

und bilden

$$b_1^2 - a_2^2a_1^2 = -4\cdot\yng(4,1,1) - 4\cdot\yng(3,3) - 6\cdot\yng(3,2,1) - 21\cdot\yng(2,2,2).$$

Auf der rechten Seite sind die Terme der höchsten Ordnung $\ydiagram{4,2}$ verschwunden! Genau das ist das Waringsche Abrahmen.

Wir wenden die gleiche Methode nochmals an. Im übrig gebliebenen höchsten Young-Rahmen $\ydiagram{4,1,1}$ stehen in der obersten Reihe 3 Kästchen über, in der mittleren 0 und in der untersten 1. Wir berechnen darum

$$-4a_2^3a_0^1 = -4(x_1+x_2+x_3)^3x_1x_2x_3 = -4\cdot\ydiagram{4,1,1} + 0\cdot\ydiagram{3,3} - 12\cdot\ydiagram{3,2,1} - 24\cdot\ydiagram{2,2,2}$$

Abrahmen ergibt

$$b_1^2 - a_2^2a_1^2 + 4a_2^3a_0 = -4\cdot\ydiagram{3,3} + 6\cdot\ydiagram{3,2,1} + 3\cdot\ydiagram{2,2,2}.$$

Da beim Rahmen $\ydiagram{3,3}$ nur in der mittleren Reihe 3 Kästchen überstehen nehmen wir

$$-4a_1^3 = -4(x_1x_2+x_3x_1+x_2x_3)^3 = -4\cdot\ydiagram{3,3} - 12\cdot\ydiagram{3,2,1} - 24\cdot\ydiagram{2,2,2}$$

und rahmen ab

$$b_1^2 - a_2^2a_1^2 + 4a_2^3a_0 + 4a_1^3 = 18\cdot\ydiagram{3,2,1} + 27\cdot\ydiagram{2,2,2}$$

$\ydiagram{3,2,1}$ führt zu

$$18a_2a_1a_0 = 18(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_3x_1+x_2x_3)x_1x_2x_3 = 18\cdot\ydiagram{3,2,1} + 54\cdot\ydiagram{2,2,2}$$

und

$$b_1^2 - a_2^2a_1^2 + 4a_2^3a_0 + 4a_1^3 - 18a_2a_1a_0 = -27\cdot\ydiagram{2,2,2}$$

$\ydiagram{2,2,2}$ leitet zu

$$-27a_0^2 = -27x_1^2x_2^2x_3^2$$

und

$$b_1^2 - a_2^2a_1^2 + 4a_2^3a_0 + 4a_1^3 - 18a_2a_1a_0 + 27a_0^2 = 0$$

oder

$$b_1 = \sqrt{a_2^2a_1^2 - 4a_2^3a_0 - 4a_1^3 + 18a_2a_1a_0 - 27a_0^2}$$

Da die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 vorgegeben sind, ist jetzt auch b_1 bekannt. Wir können, wie sich die Mathematiker ausdrücken, b_1 zum *Körper* der bekannten Zahlen *adjungieren*. Eine bombastische Ausdruckweise für eine einfache Sache. Bekanntlich ist das Einzige, was man in einer Uni richtig lernt, das Bluffen.

Als Nächstes wird A_3 zerlegt.

Der größte in $A_3 = \{e, (123), (132)\}$ enthaltene Normalteiler ist e. Die Nebenklassen sind (123) und (132), und die Quotientengruppe A_3/e ist A_3

selbst. Der Index des Normalteilers e in A_3 beträgt $|A_3|/|e| = 3$, was eine Primzahl ist.

Zur Konstruktion der symmetriegerechten Funktion verwenden wir das Monom x_1. Denn x_1 ist auf dem Normalteiler e fest: $e\ x_1 = x_1$, während es auf den Nebenklassen die unterschiedlichen Werte $(123)x_1 = x_2$ und $(132)x_1 = x_3$ annimmt. Wir brauchen jetzt noch die Einheitswurzeln von $\epsilon^3 = 1$, weil 3 der Index von e in A_3 ist. Diese Einheitswurzeln sind $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = \epsilon = \exp(i2\pi/3)$ und $\epsilon_3 = \epsilon^2$. Sie ergeben als symmetriegerechte Funktion

$$b_2 = x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3$$

Da nun

$$(123)b_2 = \epsilon^2 b_2 \quad \text{und} \quad (132)b_2 = \epsilon b_2 \ ,$$

ist $b_2^3 = ((123)b_2)^3 = ((132)b_2)^3$ auf A_3 invariant und kann darum aus a_0, a_1, a_2 und b_1 berechnet werden. Ausmultiplizieren produziert

$$b_2^3 = \sum x_1^3 + 6x_1x_2x_3 + 3\epsilon(x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1) + 3\epsilon^2(x_1^2x_3 + x_3^2x_1 + x_1^2x_3)$$

was wegen $\epsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$ und $\epsilon^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$ zu

$$b_2^3 = \sum x_1^3 - \frac{3}{2}\sum x_1^2x_2 + 6x_1x_2x_3 + i\frac{3\sqrt{3}}{2}b_1$$

führt. Das Waring-Verfahren liefert

$$b_2 = \sqrt[3]{-a_2^3 + \frac{9}{2}a_2a_1 - \frac{27}{2}a_0 + i\frac{3\sqrt{3}}{2}b_1}$$

Genauso gut hätten wir als symmetriegerechte Funktion

$$b_3 = x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon x_3$$

einführen können und hätten

$$b_3 = \sqrt[3]{-a_2^3 + \frac{9}{2}a_2a_1 - \frac{27}{2}a_0 - i\frac{3\sqrt{3}}{2}b_1}$$

erhalten. Jedenfalls können auch b_2 und b_3 zum Körper der bekannten Zahlen adjungiert werden.

Jetzt sind wird in der Lage, die Lösungen der kubischen Gleichung anzugeben. Addieren wir

$$-a_2 = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{und} \quad b_2 = x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3 \quad \text{und} \quad b_3 = x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon x_3$$

folgen

$$x_1 = \frac{-a_2 + b_2 + b_3}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{-a_2 + \epsilon^2 b_2 + \epsilon b_3}{3} \quad , \quad x_3 = \frac{-a_2 + \epsilon b_2 + \epsilon^2 b_3}{3}$$