3. Beispiel: Konstruktion des Fünfecks mit Zirkel und Lineal. Das Fünfeck wird algebraisch durch die Gleichung $x^5 = 1$ beschrieben. Mit der Einheitswurzel $\epsilon = \exp(i2\pi/5)$ sind alle 5 Lösungen durch $1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3, \epsilon^4$ gegeben. Leider geht diese Darstellung an der Aufgabenstellung vorbei. Der Wert einer transzendenten Funktion lässt sich im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren. Konstruktion mit Zirkel und Lineal bedeutet algebraisch eine Darstellung mit Quadratwurzeln. Denn Kreise werden analytisch durch quadratische Gleichungen und Gerade durch lineare Gleichungen beschrieben. Die Aufgabenstellung lautet somit, ϵ nur durch Quadratwurzeln auszudrücken.

Mit der Gruppentheorie ist das einfach. Zunächst wird aus $x^5 = 1$ die triviale Lösung $x = 1$ entfernt:

$$\frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Dies ist eine Gleichung 4. Grads deren Lösungen sich durch quadratische und kubische Wurzeln darstellen lassen. Doch auch das reicht zur Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal nicht aus. Die Vieta-Relationen sind

$$\begin{aligned}
-1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
1 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\
-1 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\
1 &= x_1x_2x_3x_4
\end{aligned}$$

Zu diesen treten wegen des speziellen Problems

$$x_2 = x_1x_1,\ x_4 = x_2x_2,\ x_3 = x_4x_4,\ x_1 = x_3x_3$$

Man versteht diese Symmetriebeziehungen sofort, wenn man x_1 bis x_4 an die Ecken eines Fünfecks im Einheitskreis schreibt und $x_1 = \epsilon$ setzt. Die zyklische Struktur ist offensichtlich: Man beginnt bei x_1 und kehrt durch fortgesetztes Quadrieren zu x_1 zurück. Die weiteren Symmetriebeziehungen

$$x_3 = x_1x_2,\ x_4 = x_1x_3,\ x_1 = x_2x_4,\ x_2 = x_3x_4$$

veranschaulicht man sich auch mit $x_1 = \epsilon$.

Wichtig bei allen diesen Beziehungen ist, dass sie nur unter den Permutationen von

$$C_4 = \{e,\ (1243),\ (1243)^2 = (14)(23),\ (1243)^3 = (1342)\}$$

invariant bleiben. Andere Permutationen wie (12) oder (123) oder (1234) würden diese Beziehungen dagegen zerstören. Die Gruppe der Gleichung

$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ ist also nicht S_4, sondern nur die kleine zyklische Untergruppe C_4. Je kleiner eine Gruppe ist, desto einfacher ist ihre Gleichung zu lösen.

Aus den weiteren Symmetriebeziehungen und $1 = x_1x_2x_3x_4$ folgen übrigens $1 = x_2x_3$ und $1 = x_1x_4$.

Größter Normalteiler von C_4 ist $\{e,\ (14)(23)\}$, und zwar mit dem Index 2. Wir konstruieren die symmetriegerechte Funktion aus dem Monom x_1:

$$e\,x_1 + (14)(23)x_1 = x_1 + x_4,\ (1243)(x_1 + x_4) = (1342)(x_1 + x_4) = (x_2 + x_3)$$

also

$$b_1 = x_1 + x_4 - (x_2 + x_3)$$

b_1 bleibt unter den Permutationen des Normalteilers invariant, während es unter den Permutationen der Nebenklasse den Wert $-b_1$ annimmt. b_1^2 ist somit unter allen Permutationen von C_4 invariant und lässt sich daher mit den Symmetriebeziehungen ausrechnen:

$$b_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_4 + x_2x_3 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)) = 5$$

also $b_1 = \sqrt{5}$. Da $2(x_1 + x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + b_1 = -1 + \sqrt{5}$ folgt

$$x_1 + x_4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Größter Normalteiler von $\{e, (14)(23)\}$ ist e, und zwar vom Index 2. Zur Konstruktion der symmetriegerechten Funktion reicht x_1 wieder aus:

$$b_2 = x_1 - x_4, \quad eb_2 = b_2, \quad (14)(23)b_2 = -b_2$$

b_2^2 kann somit durch die Symmetriebeziehungen und b_1 ausgedrückt werden:

$$b_2^2 = (x_1 + x_4)^2 - 4x_1x_4 = -\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

also

$$b_2 = i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

Wegen $2x_1 = x_1 + x_4 + b_2$ finden wir

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

was die Konstruierbarkeit des Fünfecks mit Zirkel und Lineal bedeutet.

Zusammengefasst haben wir folgenden **Rechenplan** für die Lösung algebraischer Gleichungen n^{ten} Grades:

1) Wir schreiben alle Symmetrierelationen, die zwischen den Lösungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Gleichung bekannt sind. Dazu gehören immer die Vieta-Relationen mit den Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_0$ und mitunter zusätzliche Beziehungen wie bei der Kreisteilung. Die Gruppe N_0 der Gleichung ist diejenige Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n, deren Permutationen alle Symmetrierelationen invariant lassen.

2) Wir rechnen alle Äquivalenzklassen der Gruppe N_0 aus und versuchen sie so zusammenzufügen, dass eine möglichst große Untergruppe $N_1 \subset N_0$ entsteht. N_1 ist dann Normalteiler von N_0. Ist außerdem der Index $\nu_1 = |N_0|/|N_1|$ eine Primzahl, kommen wir bei der algebraischen Lösung einen Schritt weiter.

3) Dazu konstruieren wir eine symmetriegerechte Funktion $\beta_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ so, dass die Funktion invariant bleibt, wenn auf sie Permutationen aus dem Normalteiler angewandt werden. Werden jedoch Permutationen aus den Nebenklassen kN_1 auf β_1 angewandt, soll β_1 andere Werte annehmen. Für alle Permutationen aus der Gruppe N_0 soll β_1 also ν_1 verschiedene Werte annehmen: $\beta_{10}, \beta_{11}, \ldots, \beta_{1\nu_1-1}$. Man erhält eine solche Funktion, indem man sich die Monome $X = x_1$ oder $X = x_1x_2$ oder $X = x_1^2x_2$ usw. vornimmt und von den Summen

$$\beta_1 = \sum_{g \in N_1} gX$$

die einfachste nimmt, die die genannten Kriterien erfüllt.

4) Ist ϵ eine ν_1^{te} Einheitswurzel von $\epsilon^{\nu_1} = 1$, so lautet die Lagrange-Resolvente

$$b_1 = \sum_{\mu=0}^{\nu_1-1} \epsilon^\mu \beta_{1\mu}$$

Dann ist $b_1^{\nu_1}$ eine in N_0 symmetrische Funktion, deren Wert mit dem Waringschen Abrahmen aus den Beziehungen von 1) berechnet werden kann. Da wir aus diesem bekannten Wert die ν_1^{te} Wurzel ziehen können, ist von nun an auch b_1 als bekannt anzusehen.

5) Danach ersetzen wir N_0 durch N_1 und arbeiten die Punkte 2) bis 4) durch, indem wir den größten Normalteiler $N_2 \subset N_1$ und seinen Index $\nu_2 = |N_1|/|N_2|$ berechnen, der hoffentlich eine Primzahl ist. Dann bestimmen wir die symmetriegerechte Funktion b_2 auf N_2 und berechnen $b_2^{\nu_2}$ mit dem Waring-Verfahren unter Verwendung von b_1.

6) Wiederholen wir das beschriebene Verfahren oft genug und haben wir das Glück, jedesmal einen Normalteiler mit primzahligen Index zu finden, landen wir schließlich bei einem Normalteiler, der nur aus der Einheit besteht.

Die letztmalige Anwendung des Waring-Verfahrens liefert dann die Lösung der ursprünglichen Gleichung

$$x_1 = Funktion(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots)$$

und entsprechende Ausdrücke für x_2 bis x_n.

1. Übungsaufgabe: Konstruieren Sie das Siebzehneck mit Zirkel und Lineal. Hinweis: Sie können genau wie beim Fünfeck vorgehen, nur müssen die quadratischen Symmetrierelationen vom Typ $x_2 = x_1 x_1$ durch kubische Symmetrierelationen vom Typ $x_3 = x_1 x_1 x_1$ ersetzt werden. Sonst können Sie nicht alle 16 nicht-trivialen Einheitswurzeln erreichen.

2. Übungsaufgabe: Lösen Sie die allgemeine Gleichung 4. Grads.

Hinweise:

Die symmetrische Gruppe vierer Elemente beinhaltet folgende Zyklen

$$S_4 = \{e, (..), (..)(..), (...), (....)\} \text{ mit den Ordnungen } 24 = 1 + 6 + 3 + 8 + 6$$

Größter Normalteiler von S_4 ist die alternierende Gruppe

$$A_4 = \{e, (..)(..), (...)\} \text{ mit den Ordnungen } 12 = 1 + 3 + 8$$

Die symmetriegerechte Funktion wird aus dem Monom $x_1^3 x_2^2 x_3$ gebildet.

Größter Normalteiler von A_4 ist die Vierergruppe

$$V = \{e, (..)(..)\} \text{ mit den Ordnungen } 4 = 1 + 3$$

Die symmetriegerechte Funktion wird aus dem Monom $x_1 x_2$ aufgebaut.

Größter Normalteiler von V ist die zyklische Gruppe

$$C_2 = \{e,\ (12)(34)\}$$

Die symmetriegerechte Funktion wird aus dem Monom x_1 erzeugt.

Größter Normalteiler von C_2 ist e. Die symmetriegerechte Funktion wird aus dem Monom x_1 aufgebaut.

3. Übungsaufgabe: Die Gleichung 5. Grades ist durch Wurzelziehen nicht lösbar. Hinweis: Untersuchen Sie die Zyklenstruktur (d.h. die Ähnlichkeitsklassen) der alternierenden Gruppe A_5. Die alternierende Gruppe besteht aus allen Permutationen, die sich aus einer geraden Anzahl von Transpositionen erzeugen lassen. Beweisen Sie damit, dass A_5 keinen nicht-trivialen Normalteiler hat. Lange Rechnerei ist nicht erforderlich. Wie in der vorigen Übungsaufgabe müssen Sie nur zählen, wie viele Permutationen in jeder Ähnlichkeitsklasse stehen, und berücksichtigen, dass jeder Normalteiler eine Untergruppe ist. Die Ordnung einer Untergruppe aber muss die Ordnung der Obergruppe teilen.