T^{-1} und t^{-1} sind in

$$\begin{pmatrix} T & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1} & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zunächst nur Symbole. Sobald aber die linke Seite ausmultipliziert wird, finden wir $TT^{-1} = E$ und $Tt^{-1} + t = 0$. T^{-1} bedeutet also die übliche inverse Matrix, während unter t^{-1} der Spaltenvektor $t^{-1} = -T^{-1}t$ zu verstehen ist.

Für die Ähnlichkeitstransformation

$$\begin{pmatrix} \ddot{A} & \ddot{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1} & -T^{-1}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

liefert die Multiplikation

$$\ddot{A} = TAT^{-1} \text{ und } \ddot{a} = -TAT^{-1}t + Ta + t$$

Die zweite Gleichung ist wichtig. Wenn wir voraussetzen, dass die Äquivalenz des Drehspiegelungsanteils erledigt ist, können wir $T = E$ setzen und erhalten $a - \ddot{a} = (E - A)s$ mit $s = -t$ für die Äquivalenz des Verschiebungsanteils. Besonders wichtig ist die Äquivalenz mit der Nulllösung $\ddot{a} = 0$. Wir suchen ja nach Symmetrietransformationen, in denen Drehspiegelungen A und Verschiebungen a zugleich auftreten. Sie sollen sich nicht auf ein Produkt zweier Symmetrietransformationen

$$\begin{pmatrix} E & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zurückführen lassen. Wenn wir nun eine Symmetrietransformation $\begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gefunden haben, in der sich die Verschiebung a zu 0 transformieren lässt, war die Mühe vergeblich.

Damit sind die Frobenius-Bedingungen für Symmetrietransformationen mit nicht verschwindender Verschiebung ermittelt:

1) *Frobenius-Kongruenz*: Wenn für die Drehspiegelungsanteile $AB = C$ gilt, muss für die zugehörigen Verschiebungen a, b und c

$$Ab + a = c \; mod \; 1$$

gelten. mod 1 muss hinzugefügt werden, weil ganzzahlige Verschiebungen wegen des Gitters immer zulässig sind.

2) *Äquivalenzbedingung*: Die Verschiebung a ist nur dann nicht trivial, wenn es *keinen* Spaltenvektor s derart gibt, dass

$$a = (E - A)s \; mod \; 1$$

Die allgemeine Bedingung für zwei äquivalente Verschiebungen lautet

$$Ta - \ddot{a} = (E - TAT^{-1})s \ mod \ 1$$

<u>Beispiel:</u> Die 2 Bewegungsgruppen der Punktgruppe $C_v = C_s$. Die Gruppe, siehe S.28, hat nur zwei Elemente: Die Einheit E und die Vertikalspiegelung $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die einzige nicht triviale Multiplikation der Punktgruppe ist $BB = E$. Daraus folgt als Frobenius-Kongruenz $Bb + b = 0$ oder

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ mod \ 1$$

Lösungen sind

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

mit beliebigem b_2. Die erste Lösung ist richtig, aber trivial. Bei der zweiten müssen wir beweisen, dass sie nicht äquivalent zur Nulllösung ist. Er darf keinen Spaltenvektor s derart geben, dass $(E - B)b = s \ mod \ 1$ ist, also

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \ mod \ 1$$

Das beliebige b_2 können wir wegtransformieren, denn $s_2 = b_2/2$. Bei dem $1/2$ ist das aber unmöglich, denn $1/2 = 0 \ mod \ 1$ ist unlösbar. Mit anderen Worten: $1/2$ ist keine ganze Zahl.

Damit folgen aus der Punktgruppe

$$C_s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

zwei Bewegungsgruppen. Die triviale

$$C_s^I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & m_1 \\ 0 & 1 & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & n_1 \\ 0 & -1 & n_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und die Gleitspiegelungsgruppe

$$C_s^{II} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & m_1 \\ 0 & 1 & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 + n_1 \\ 0 & -1 & n_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Darin bedeuten m_1, m_2 und n_1, n_2 ganze Zahlen.

Gegenbeispiel: Die Punktgruppe C_2 hat nur eine Bewegungsgruppe. Genauso wie C_s besteht C_2 aus nur 2 Elementen: der Einheit E und der Drehung $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, siehe S.27. Die Frobenius-Kongruenz $Aa + a = 0$ liefert überhaupt keine Bedingungen für die Verschiebung a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ mod\ 1$$

Wir können a beliebig ansetzen, finden aber in der Äquivalenzbedingung $a = (E - A)s$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \ mod\ 1$$

immer einen Spaltenvektor s, nämlich $s_1 = a_1/2,\ s_2 = a_2/2$, mit dem alle Verschiebungen zu 0 transformiert werden können. Die einzige Bewegungsgruppe von C_2 ist also

$$C_2^I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & m_1 \\ 0 & 1 & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & n_1 \\ 0 & -1 & n_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Der Befund ist typisch für die zweidimensionalen Drehungen. Denn wenn die Inverse $(E - A)^{-1}$ existiert, lautet die Lösung von $a = (E - A)s$ einfach $s = (E - A)^{-1}a$. Bei Drehungen ist die Determinante, die über die Existenz der Inversen entscheidet,

$$det(E - A) = det \begin{pmatrix} 1 - \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & 1 - \cos\phi \end{pmatrix} = 2(1 - \cos\phi)$$

von Null verschieden. Bei dreidimensionalen Drehungen ist das anders. Dort können Verschiebungen parallel zur Drehachse auftreten, was *Schraubungen* als Symmetrietransformationen ermöglicht.

Beispiel: Die Punktgruppe C_{2v} erzeugt 3 Bewegungsgruppen. C_{2v} hat 4 Elemente, die auf S.28 zusammengestellt sind. Nennen wir die Drehung $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, die erste Vertikalspiegelung $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und die zweite $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1}$ überführt B in C und umgekehrt. Die Gruppenrelationen sind $AA = BB = CC = E$, $AB = BA = C$, $AC = CA = B$, $BC = CB = A$ die allesamt Frobenius-Kongruenzen nach sich ziehen. Wie im vorigen Beispiel duldet die Drehung A keine Verschiebung, $a = 0$. Man beginnt deshalb bei den Vertikalspiegelungen mit $BB = E$

und $CC = E$ wie im ersten Beispiel und prüft dann mit den restlichen Relationen nach, dass außer der Nulllösung folgende Verschiebungen möglich sind:

$$b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Mit den allgemeinen Äquivalenzbedingungen verifiziert man schließlich, dass die zweite und dritte Lösung äquivalent sind, die erste aber unterschieden ist. Bitte vergleichen Sie diese Ergebnisse mit der Tafel „Punkt- und Bewegungsgruppen der Ebene".
Übungsaufgabe: Welche Bewegungsgruppen gestattet C_k?
Übungsaufgabe: Berechnen sie die Bewegungsgruppen von C_{4v}.

Im Endergebnis treten zu den 13 Punktgruppen 4 weitere Bewegungsgruppen: $C_v = C_s$ gestattet 2 Bewegungsgruppen, C_{2v} 3 und C_{4v} 2.

4 Lie-Gruppen lösen Differenzialgleichungen

Satz von Lie: *Weiss man, dass die Schar der Integralcurven einer vorgelegten Differentialgleichung*

$$X dy - Y dx = 0$$

eine bekannte infinitesimale Transformation

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial x}$$

gestattet, welche jedoch nicht jede Integralcurve für sich invariant lässt, so ist

$$\frac{1}{X\eta - Y\xi}$$

ein Integrabilitätsfactor der Differentialgleichung und diese also durch eine Quadratur integrierbar in der Form

$$\int \frac{X dy - Y dx}{X\eta - Y\xi} = Const.$$

Die Differenzialgleichung $X dy - Y dx = 0$ würde man heute als

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = \frac{Y}{X}$$