

schreiben. Die Aufteilung in Zähler und Nenner ist weitgehend beliebig. Es geht also um Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wenn Sie eine gute Analysis-Vorlesung frequentieren, lernen Sie etwa im zweiten Semester einen Haufen Tricks zur Lösung solcher Differentialgleichungen: homogene, lineare, Bernoulli, etliche andere spezielle Typen. Der Satz von Lie offenbart das Prinzip hinter all diesen Tricks. Die dabei entwickelten Methoden setzen Linearität nicht voraus. Sie sind auf Differentialgleichungen höherer Ordnung, ja sogar auf partielle Differentialgleichungen erweiterbar.

Für **gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung** gilt folgender **Rechenplan**:

1) Von der *Differentialgleichung* $dy/dx = Y(x, y)/X(x, y)$ zum *Differentialoperator*

$$A = X(x, y)\partial_x + Y(x, y)\partial_y$$

2) Definition einer *kontinuierlichen Gruppe* mit dem *Gruppenparameter* a

$$x_a = f(x, y, a) \quad \text{und} \quad y_a = g(x, y, a)$$

und Ableitung ihrer *Infinitesimaltransformationen*

$$x_{\delta a} = x + \delta a \xi(x, y) \quad \text{und} \quad y_{\delta a} = y + \delta a \eta(x, y)$$

und des Differentialoperators der Symmetrietransformation

$$U = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$$

3) Die Differentialgleichung bleibt unter der kontinuierlichen Gruppe invariant oder, wie Lie es ausdrückt, *sie gestattet die kontinuierliche Gruppe*, falls für den *Kommutator*

$$[U, A] = \lambda(x, y)A$$

gilt. Darin ist $\lambda(x, y)$ irgendeine Funktion, also kein Differentialoperator.

4) Die Gestattung zieht sofort die Lösung der Differentialgleichung als Integral

$$\int \frac{Xdy - Ydx}{X\eta - Y\xi} = \text{Const.}$$

nach sich.

Beispiel: Die einfachste separable Differentialgleichung und die kontinuierliche Gruppe der Translationen. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F(y)}$$

löst man durch Separation. D.h. man schreibt sie als $F(y)dy = dx$ und integriert zu

$$x = \int F(y)dy$$

Hier die Liesche Methode anwenden bedeutet mit Kanonen auf Spatzen zu schießen. Trotzdem folgen wir dem Rechenplan.

1) Aus der Differentialgleichung $dy/dx = 1/F(y)$ wird die Differentialform $F(y) dy - 1 dx = 0$. Also ist $X(x, y) = F(y)$ und $Y(x, y) = 1$ und der Differentialoperator

$$A = X\partial_x + Y\partial_y = F(y)\partial_x + \partial_y$$

2) Als kontinuierliche Gruppe kommen die Translationen

$$x_a = x + a \quad \text{und} \quad y_a = y$$

in Frage. Denn dabei ändert sich y nicht, während das additive a in $x_a = x+a$ im Differential dx herausfällt. Aus $dy/dx = 1/F(y)$ folgt also $dy_a/dx_a = 1/F(y_a)$. Genau das ist gemeint, wenn es heißt, die Differentialgleichung solle unter der Gruppe invariant bleiben oder die Differentialgleichung solle die Gruppe gestatten.

Es handelt sich wirklich um eine Gruppe. Dem Einselement entspricht der Gruppenparameter $a = 0$, dem Inversen von a entspricht $-a$ und die Gruppen„multiplikation“ bedeutet Addition des Gruppenparameters $a+b=c$, wobei a, b, c reelle Zahlen sein sollen. Assoziativität ist bei der Addition reeller Zahlen selbstverständlich: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Die infinitesimalen Transformationen gehen aus den endlichen durch Linearisierung hervor. In diesem Beispiel unterscheiden sie sich nicht von den endlichen, weil schon die endliche Gruppe linear ist. Wir finden

$$x_{\delta a} = x + \delta a \quad \text{und} \quad y_{\delta a} = y + \delta a \cdot 0$$

also $\xi = 1$ und $\eta = 0$. Der Operator der Symmetrietransformation ist somit

$$U = \xi\partial_x + \eta\partial_y = \partial_x$$

3) Um die Gestattung nochmals zu prüfen, berechnen wir den Kommutator

$$[U, A] = [\partial_x, F(y)\partial_x + \partial_y] = F(y)\partial_x^2 + \partial_x\partial_y - F(y)\partial_x^2 - \partial_y\partial_x = 0$$

Die Funktion $\lambda(x, y)$ ist hier identisch 0, was geschehen kann.

4) Der integrierende Faktor ist deshalb

$$\frac{1}{X\eta - Y\xi} = \frac{1}{F \cdot 0 - 1 \cdot 1} = -1$$

und die Lösung der Differentialgleichung

$$\int -F(y)dy + dx = Const.$$