schreiben. Die Aufteilung in Zähler und Nenner ist weitgehend beliebig. Es geht also um Lösungen gewöhnlicher Differenzialgleichungen erster Ordnung.

Wenn Sie eine gute Analysis-Vorlesung frequentieren, lernen Sie etwa im zweiten Semester einen Haufen Tricks zur Lösung solcher Differenzialgleichungen: homogene, lineare, Bernoulli, etliche andere spezielle Typen. Der Satz von Lie offenbart das Prinzip hinter all diesen Tricks. Die dabei entwickelten Methoden setzen Linearität nicht voraus. Sie sind auf Differenzialgleichungen höherer Ordnung, ja sogar auf parzielle Differenzialgleichungen erweiterbar.

Für **gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung** gilt folgender **Rechenplan**:

1) Von der *Differenzialgleichung* $dy/dx = Y(x,y)/X(x,y)$ zum *Differenzialoperator*

$$A = X(x,y)\partial_x + Y(x,y)\partial_y$$

2) Definizion einer *kontinuierlichen Gruppe* mit dem *Gruppenparameter* $a$

$$x_a = f(x,y,a) \quad \text{und} \quad y_a = g(x,y,a)$$

und Ableitung ihrer *Infinitesimaltransformazionen*

$$x_{\delta a} = x + \delta a\ \xi(x,y) \quad \text{und} \quad y_{\delta a} = y + \delta a\ \eta(x,y)$$

und des Differenzialoperators der Symmetrietransformazion

$$U = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$$

3) Die Differenzialgleichung bleibt unter der kontinuierlichen Gruppe invariant oder, wie Lie es ausdrückt, *sie gestattet die kontinuierliche Gruppe*, falls für den *Kommutator*

$$[U,A] = \lambda(x,y)A$$

gilt. Darin ist $\lambda(x,y)$ irgendeine Funkzion, also kein Differenzialoperator.

4) Die Gestattung zieht sofort die Lösung der Differenzialgleichung als Integral

$$\int \frac{Xdy - Ydx}{X\eta - Y\xi} = Const.$$

nach sich.

Beispiel: Die einfachste separable Differenzialgleichung und die kontinuierliche Gruppe der Translazionen. Die Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F(y)}$$

löst man durch Separazion. D.h. man schreibt sie als $F(y)dy = dx$ und integriert zu

$$x = \int F(y)dy$$

Hier die Liesche Methode anwenden bedeutet mit Kanonen auf Spatzen zu schießen. Trotzdem folgen wir dem Rechenplan.
1) Aus der Differenzialgleichung $dy/dx = 1/F(y)$ wird die Differenzialform $F(y)\ dy - 1\ dx = 0$. Also ist $X(x,y) = F(y)$ und $Y(x,y) = 1$ und der Differenzialoperator

$$A = X\partial_x + Y\partial_y = F(y)\partial_x + \partial_y$$

2) Als kontinuierliche Gruppe kommen die Translazionen

$$x_a = x + a \quad \text{und} \quad y_a = y$$

in Frage. Denn dabei ändert sich $y$ nicht, während das additive $a$ in $x_a = x+a$ im Differenzial $dx$ herausfällt. Aus $dy/dx = 1/F(y)$ folgt also $dy_a/dx_a = 1/F(y_a)$. Genau das ist gemeint, wenn es heißt, die Differenzialgleichung solle unter der Gruppe invariant bleiben oder die Differenzialgleichung solle die Gruppe gestatten.

Es handelt sich wirklich um eine Gruppe. Dem Einselement entspricht der Gruppenparameter $a = 0$, dem Inversen von $a$ entspricht $-a$ und die Gruppen„multiplikazion“ bedeutet Addizion des Gruppenparameters $a+b = c$, wobei $a, b, c$ reelle Zahlen sein sollen. Assoziativität ist bei der Addizion reeller Zahlen selbstverständlich: (a+b)+c=a+(b+c).

Die infinitesimalen Transformazionen gehen aus den endlichen durch Linearisierung hervor. In diesem Beispiel unterscheiden sie sich nicht von den endlichen, weil schon die endliche Gruppe linear ist. Wir finden

$$x_{\delta a} = x + \delta a\ 1 \quad \text{und} \quad y_{\delta a} = y + \delta a\ 0$$

also $\xi = 1$ und $\eta = 0$. Der Operator der Symmetrietransformazion ist somit

$$U = \xi\partial_x + \eta\partial_y = \partial_x$$

3) Um die Gestattung nochmals zu prüfen, berechnen wir den Kommutator

$$[U, A] = [\partial_x, F(y)\partial_x + \partial_y] = F(y)\partial_x^2 + \partial_x\partial_y - F(y)\partial_x^2 - \partial_y\partial_x = 0$$

Die Funkzion $\lambda(x,y)$ ist hier identisch 0, was geschehen kann.
4) Der integrierende Faktor ist deshalb

$$\frac{1}{X\eta - Y\xi} = \frac{1}{F \cdot 0 - 1 \cdot 1} = -1$$

und die Lösung der Differenzialgleichung

$$\int -F(y)dy + dx = Const.$$