Beispiel: Lösung der homogenen Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x})$$

Wir folgen dem Rechenplan

1) Aus der Differenzialgleichung $dy/dx = F(y/x)$ wird die Differenzialform $dy - F(y/x)dx = 0$. Also ist $X = 1$ und $Y = F(y/x)$ und der Differenzialoperator

$$A = X\partial_x + Y\partial_y = \partial_x + F(\frac{y}{x})\partial_y$$

2) Als kontinuierliche Gruppe kommen die Ähnlichkeitstransformationen

$$x_a = x + ax = (1+a)x \quad \text{und} \quad y_a = y + ay = (1+a)y$$

in Frage. Die Koordinaten x und y werden in gleicher Weise gedehnt. Ich habe den Gruppenparameter a so eingerichtet, dass für $a = 0$ nichts gedehnt wird, und deshalb den schwerfälligen Faktor $1 + a$ erhalten. Die Verschiebung um 1 ist aber unwesentlich. Setzen wir $\tilde{a} = 1+a$, $\tilde{b} = 1+b$, $\tilde{c} = 1+c$ usw., bilden die positiven reellen Zahlen mit der gewöhnlichen Multiplikation $\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{c}$ eine Gruppe. Einselement ist diesmal die 1, das Inverse ist der Kehrwert usw.

Als infinitesimale Transformationen folgen

$$x_{\delta a} = x + \delta a\ x \quad \text{und} \quad y_{\delta a} = y + \delta a\ y$$

also $\xi = x$ und $\eta = y$. Der Operator der Symmetrietransformation ist somit

$$U = \xi\partial_x + \eta\partial_y = x\partial_x + y\partial_y$$

3) Gestattet die Differenzialgleichung die Gruppe? Dazu berechnen wir den Kommutator

$$[U, A] = [x\partial_x + y\partial_y, \partial_x + F(\frac{y}{x})\partial_y] = -\frac{y}{x}F'\partial_y + \frac{y}{x}F'\partial_y - \partial_x - F(\frac{y}{x})\partial_y = -A$$

Hier ist $\lambda = -1$. Gruppe und Differenzialgleichung sind also miteinander verträglich. Die Berechnung des Kommutators wurde vereinfacht: Wegen der Konstruktion des Kommutators ist von vornherein klar, dass sich die in den Differenzialoperatoren quadratischen Terme wie ∂_x^2, ∂_y^2 und $\partial_x\partial_y$ wegheben müssen. Es reicht also, nur die in den Differenzialoperatoren linearen Terme aufzuschreiben. F' bedeutet wie üblich die Ableitung der Funktion nach ihrem Argument.

4) Der integrierende Faktor ist deshalb

$$\frac{1}{X\eta - Y\xi} = \frac{1}{y - F(y/x)x}$$

und die Lösung der Differenzialgleichung

$$\int \frac{dy - F(y/x)dx}{y - F(y/x)x} = Const.$$

Vergleichen Sie dies mit der Lehrbuch-Prozedur. Dort wird meist eine neue Variable $z = y/x$ eingeführt und nach Umschreibung auf x und z festgestellt, dass die umgeformte Differenzialgleichung separabel ist. Diese Methode führt zwar auch zum Ziel, aber sie ist speziell und kann nicht auf andere Differenzialgleichungen angewendet werden.

Beispiel: Lösung der „rotationssymmetrischen“ Differenzialgleichung

$$\frac{xdy/dx - y}{x + ydy/dx} = F(x^2 + y^2)$$

Wegen der rechten Seite kann man vermuten, die Differenzialgleichung habe etwas mit Rotationssymmetrie zu tun. Ob aber die linke Seite Drehungen gestattet, wird zu untersuchen sein.

1) Aus der Differenzialgleichung $x\frac{dy}{dx} - y - (x + y\frac{dy}{dx})F = 0$ wird die Differenzialform $(x-yF)dy-(y+xF)dx = 0$. Also ist $\underline{X = x - yF \text{ und } Y = y + xF}$ und der Differenzialoperator

$$A = X\partial_x + Y\partial_y = (x - yF(x^2 + y^2))\partial_x + (y + xF(x^2 + y^2))\partial_y$$

2) Die Drehgruppe[1] SO_2 wird beschrieben durch

$$x_a = x\cos a - y\sin a \quad \text{und} \quad y_a = x\sin a + y\cos a$$

Die Gruppeneigenschaften gehen letztlich auf die Additionsregeln der reellen Zahlen zurück.

Durch Linearisierung um $a = 0$ finden wir die infinitesimalen Transformationen

$$x_{\delta a} = x - \delta a\ y \quad \text{und} \quad y_{\delta a} = y + \delta a\ x$$

Somit $\underline{\xi = -y \text{ und } \eta = x}$ und

$$U = \xi\partial_x + \eta\partial_y = -y\partial_x + x\partial_y$$

3) Die Nachweis, ob die Differenzialgleichung unter der Gruppe invariant bleibt, macht diesmal sogar dann Arbeit, wenn wir die quadratischen Terme weglassen

$$\begin{aligned}[U, A] = & \quad [-y\partial_x + x\partial_y, (x - yF(x^2 + y^2))\partial_x + (y + xF(x^2 + y^2))\partial_y] \\ = & \quad -y(1 - 2xyF')\partial_x - yF\partial_y - 2x^2yF'\partial_y + x(-F - 2xy^2F')\partial_x \\ & \quad +x(1 + 2xyF')\partial_y - (x - yF)\partial_y + (y + xF)\partial_x = 0\end{aligned}$$

[1] Speziell Orthogonal im Zweidimensionalen; sie ist speziell, weil Spiegelungen nicht zugelassen werden.

4) Integrierender Faktor ist somit

$$\frac{1}{X\eta - Y\xi} = \frac{1}{(x-yF)x + (y+xFy)y} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

und die Lösung der „rotationssymmetrischen“ Differenzialgleichung

$$\int \frac{(x-yF)dy - (y+xF)dx}{x^2+y^2} dx = Const.$$

In den Lehrbüchern werden neue Variable $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\varphi = \arctan{(y/x)}$ eingeführt und die ursprüngliche Differenzialgleichung auf eine separable zurückgeführt.

<u>Beispiel</u>: Lösung der linearen Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \Phi(x)y + \Psi(x)$$

mit zwei vorgebenen Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$. Wir halten uns nicht mit der üblichen Unterscheidung zwischen homogenen und inhomogenen Differenzialgleichungen auf.

1) Die Diffgleichung wird zur Differenzialform $dy - (\Phi(x)y + \Psi(x))dx = 0$, also $\underline{X = 1 \text{ und } Y = \Phi(x)y + \Psi(x)}$, was zum Operator

$$A = X\partial_x + Y\partial_y = \partial_x + (\Phi(x)y + \Psi(x))\partial_y$$

führt.

2) Linearität bedeutet Freiheit in der y Koordinate. Eine geeignete Gruppe sollte

$$x_a = x \quad \text{und} \quad y_a = y + a\,\varphi(x)$$

mit zunächst unbekanntem $\varphi(x)$ sein. Die infinitesimalen Transformationen sind jedenfalls

$$x_{\delta a} = x + \delta a\, 0 \quad \text{und} \quad y_{\delta a} = y + \delta a\, \varphi(x)$$