d.h. $\underline{\xi = 0 \text{ und } \eta = \varphi(x)}$, was den Operator

$$U = \xi\partial_x + \eta\partial_y = \varphi(x)\partial_y$$

liefert.
3) Auswertung des Kommutators ergibt

$$[U, A] = [\varphi(x)\partial_y, \partial_x + (\Phi(x)y + \Psi(x))\partial_y] = (\varphi(x)\Phi(x) - \varphi'(x))\partial_y$$

Die rechte Seite kann nicht proportional zum Operator A sein, weil vor ∂_y ein Term proportional zu y fehlt. Also muss die rechte Seite gleich Null sein. Das ergibt als Bedingung für $\varphi(x)$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \Phi(x) \quad \text{woraus} \quad \varphi(x) = \exp\int \Phi(x)dx$$

folgt.
4) Integrierender Faktor ist somit

$$\frac{1}{X\eta - Y\xi} = \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\exp\int \Phi(x)dx}$$

und die Lösung

$$\int \frac{dy - (\Phi(x)y + \Psi(x))dx}{\exp\int \Phi(x)dx} = Const.$$

Übungsaufgabe: Lösen Sie die Bernoullische Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \Phi(x)y + \Psi(x)y^n$$

Anleitung: Probieren Sie es mit den Gruppengleichungen

$$x_a = x \quad \text{und} \quad y_a = y + a\, y^m\varphi(x)$$

und bestimmen Sie m und $\varphi(x)$ so, dass die Bernoulli-Gleichung die Gruppe zulässt.

Die beste Beweis des Satzes von Lie findet sich in einem Buch von Lie selbst,[1] und zwar im Bereich der Seiten 95 bis 107. Dem in meiner Vorlesung angewandte Rechenplan entsprechen Lies Theoreme 8 und 9. In einem modernen Lehrbuch[2] kommt Lies Theorem 8 als Theorem 2.48 vor. Es wird in seiner Bedeutung unterschätzt und kann erst gewürdigt werden, wenn man sich durch einen Wust von Formalitäten gearbeitet hat. Dennoch enthält

[1] Sophus Lie: Differentialgleichungen, Leipzig 1891 und New York 1967

[2] Peter J. Olver: Applications of Lie Groups to Differential Equations, New York 1993

dieses Buch zur Zeit den meisten Stoff über den Zusammenhang zwischen kontinuierlichen Gruppen und Differenzialgleichungen.

Die StudentInnen könnten sich über den Kommutator wundern, der in diesem Kapitel eine so große Rolle gespielt hat. Was hat er mit den Begriffen zu tun, die bei der Lösung der algebraischen Gleichungen entscheidend waren? Der wichtigste Begriff bei den endlichen Gruppen ist der Normalteiler. Ein Rezept Normalteiler zu finden besteht in der Berechnung des *Kommutanten* $ghg^{-1}h^{-1}$. Man nimmt für g und h nacheinander alle Elemente der Gruppe und bekommt mit $ghg^{-1}h^{-1}$ einen Normalteiler. Wendet man das gleiche Rezept auf kontinuierliche Gruppen an und geht von den Gruppengleichungen zu den infinitesimalen Transformationen über, wird in niedrigster nichttrivialer Ordnung aus dem Kommutanten der Kommutator.

Leider bekommt man mit dem Kommutanten-Rezept nicht alle Normalteiler. Die im Kapitel 1 meiner Vorlesung vorgestellte Methode, Normalteiler aus Äquivalenzklassen herzustellen, ist besser. Genauso gibt es bei den kontinuierlichen Gruppen eine Methode, die dem Kommutator überlegen ist, nämlich die *Erweiterung (prolongation)*. Sie wird von Lie im Kapitel 13 seines Buchs erklärt.

5 Irreduzible Darstellungen

Young's Methode *Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n von n Objekten können so ausgerechnet werden: Alle Youngschen Rahmen aus n Kästchen werden aufgezeichnet. Die Rahmen werden so mit den Ziffern von 1 bis n gefüllt, dass die Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte zunehmen. Für die Zeilen dieser Tableaux wird ein Symmetrisierer $P = \sum p$ aufgestellt. Er besteht aus allen Permutationen p, in denen die Zahlen der Zeilen miteinander vertauscht werden. Genauso wird ein Anti-Symmetrisierer $Q = \sum \delta_q q$ aufgestellt. Er besteht aus allen Permutationen q, in denen die Zahlen der Spalten miteinander vertauscht werden. Die Permutation q erhält ein positives Vorzeichen δ_q, wenn sie sich aus einer geraden Anzahl von Transpositionen aufbauen lässt. Im entgegengesetzten Fall ist das Vorzeichen δ_q negativ. Aus den zu einem Tableau gehörenden P und Q werden die Linksideale $Y = QP$ berechnet. Wenn nun alle Elemente g von S_n mit den Linksidealen multipliziert werden: gY, entstehen auf der rechten Seite Linearkombinationen von Linksidealen. Deren Koeffizienten bilden die irreduziblen Darstellungen.*

Wir hatten Matrix-Darstellungen von Gruppen bei der Kristallografie im Kapitel 3 kennengelernt. Zu jeder Gruppe kann man beliebig viele Matrix-

Darstellungen finden. Die gerade genannten *irreduziblen Darstellungen* sind die einfachsten, aus denen alle anderen aufgebaut werden können. Die Lehrbücher über Gruppentheorie sind mit Darstellungstheorie so vollgestopft, dass die Gruppentheorie aus nichts Anderem zu bestehen scheint. Allerdings findet man in den Lehrbücher wenig Anwendbares, wenn es um die wirkliche Berechnung irreduzibler Darstellungen geht. Die hier gelehrte Youngsche Methode ist ähnlich wie das Waringsche Abrahmen fast verschollen, obwohl ähnliche Methoden auch bei den Darstellungen kontinuierlicher Gruppen wie SU(3) zum Ziel führen. Am meisten finden die Lernbegierigen bei Boerner[3] im IV. Kapitel und bei Hamermesh[4] in Section 7-10.

<u>Beispiel</u>: Die irreduziblen Darstellungen von S_3.

Es gibt drei Youngsche Rahmen $\ydiagram{3}\ \ydiagram{2,1}\ \ydiagram{1,1,1}$, aber vier Youngsche Tableaux

$$\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 1 \\ 2 \\ 3 \end{ytableau}$$

Zum ersten gehört nur ein *Symmetrisierer*. Der *Anti-Symmetrisierer* ist trivial.

$$P = e + (123) + (132) + (12) + (13) + (23) \quad \text{und} \quad Q = e$$

Das erste *Linksideal* ist somit

$$Y_1 = QP = e + (123) + (132) + (12) + (13) + (23)$$

Ähnlich einfach geht es mit dem vierten Young-Tableau. Der Symmetrisierer ist trivial, während der Anti-Symmetrisierer die Summe aller Elemente von S_3 ist, allerdings mit Vorzeichen garniert.

$$P = e \quad \text{und} \quad Q = e + (123) + (132) - (12) - (13) - (23)$$

Das vierte Linksideal lautet deshalb

$$Y_4 = QP = e + (123) + (132) - (12) - (13) - (23)$$

Bei den mittleren Young-Tableaux ist es schwieriger. Wir finden

$$P = [e + (12)]e \quad \text{und} \quad Q = [e - (13)]e$$

mit dem Linksideal

$$Y_2 = QP = e + (12) - (13) - (123)$$

[3] Hermann Boerner: Darstellungen von Gruppen, Berlin 1955

[4] Morton Hamermesh: Group Theory and its Applications, Reading 1962

sowie

$$P = [e + (13)]e \quad \text{und} \quad Q = [e - (12)]e$$

mit dem Linksideal

$$Y_3 = QP = e + (13) - (12) - (132)$$

Daraus folgen die irreduziblen Darstellungen.

Aus dem Linksideal Y_1 entsteht die *total untreue* Darstellung, in der jedem Gruppenelement die Eins zugeordnet wird.

$$\begin{array}{ccc} eY_1 = 1 \cdot Y_1 & (123)Y_1 = 1 \cdot Y_1 & (132)Y_1 = 1 \cdot Y_1 \\ (12)Y_1 = 1 \cdot Y_1 & (13)Y_1 = 1 \cdot Y_1 & (23)Y_1 = 1 \cdot Y_1 \end{array}$$

Diese Darstellung ist zwar trivial, doch kommt sie in Anwendungen überraschend oft vor.

Interessanter benimmt sich das Linksideal Y_4

$$\begin{array}{ccc} eY_4 = 1 \cdot Y_4 & (123)Y_4 = 1 \cdot Y_4 & (132)Y_4 = 1 \cdot Y_4 \\ (12)Y_4 = -1 \cdot Y_4 & (13)Y_4 = -1 \cdot Y_4 & (23)Y_4 = -1 \cdot Y_4 \end{array}$$

Auch diese Darstellung, die aus ± 1 besteht, ist untreu, d.h. nur homomorf. Sie unterscheidet lediglich zwischen den Elementen der alternierenden Gruppe und dem Rest von S_3. In der Tat zeigen sich in den untreuen Darstellungen die Normalteiler beziehungsweise die Quotientengruppen.

Alle bisherigen Erkenntnisse zusammen ergeben die folgende Tabelle:

S_3	e	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
Y_1	1	1	1	1	1	1
Y_4	1	1	1	-1	-1	-1

Spannender geht es bei den Linksidealen Y_2 und Y_3 zu. Selbstverständlich ist $eY_2 = 1 \cdot Y_2$ und $eY_3 = 1 \cdot Y_3$, aber schon bei der Multiplikation von (12) mit Y_2 geschieht eine Katastrofe

$$(12)Y_2 = (12)[e + (12) - (13) - (123)] = (12) + e - (132) - (23)$$

Auf der rechten Seite steht keines der bisher aufgestellten Linksideale. Wir fassen uns aber und definieren

$$Y_2' = e + (12) - (23) - (132)$$

Damit geht alles wie von selbst.

$$\begin{array}{ccc} eY_2 = Y_2 & (123)Y_2 = -Y_2 + Y_2' & (132)Y_2 = -Y_2' \\ (12)Y_2 = Y_2' & (13)Y_2 = -Y_2 & (23)Y_2 = Y_2 - Y_2' \end{array}$$

Umgekehrt probieren wir aus, was herauskommt, wenn die Gruppenelemente mit Y_2' multipliziert werden.

$$\begin{array}{lll} eY_2' = Y_2' & (123)Y_2' = -Y_2 & (132)Y_2' = Y_2 - Y_2' \\ (12)Y_2' = Y_2 & (13)Y_2' = -Y_2 + Y_2' & (23)Y_2' = -Y_2' \end{array}$$

Wesentlich ist, auf den rechten Seite der zwei letzten Gleichungsblöcke stehen immer Linearkombinationen von Y_2 und Y_2'. Darum können alle diese Gleichungen mit Matrizen geschrieben werden:

$$e\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix}$$

$$(123)\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix}$$

$$(132)\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix}$$

$$(12)\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix}$$

$$(13)\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix}$$

$$(23)\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix}$$

Hier steht die *treue*, d.h. isomorfe Matrix-Darstellung der Gruppe S_3. Bitte überzeugen Sie sich, dass sich diese Matrizen bei ihrer Multiplikation genauso verhalten wie die zugehörigen Permutationen.

Die geometrische Deutung dieser Matrix-Darstellung wurde in dieser Vorlesung bereits gegeben. Die auf S.29 definierte Matrix A beschreibt in einem hexagonalen Gitter eine Drehung um $\pi/3$. A^2 ist der hiesigen Darstellung von (132) gleich, was sich als Drehung um $2\pi/3$ deuten lässt. Die hiesige Darstellung von (12) entspricht einer Vertikalspiegelung. Insgesamt ist die Permutationsgruppe S_3 der kristallografischen Gruppe C_{3v} isomorf.

Übungsaufgabe: Die Rechnung mit dem Linksideal Y_3 ergibt das gleiche Resultat. Je nachdem, wie Sie Y_3' definieren, entsteht genau die gleiche oder eine äquivalente Darstellung wie mit Y_2.