Ein Sätzchen über algebraische Gleichungen vierten Grades

Ulrich Brosa, brosa-gmbh@t-online.de

16. Juli 2012

Die Lösungen x_1, x_2, x_3, x_4 der Gleichung

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

gestatten genau dann die besondere Symmetriebeziehung $x_1x_3 + x_2x_4 = 0$, wenn

$$\sqrt{a_3^2 - 4a_2}\sqrt{-a_0} = a_1$$

U. Brosa, Criteria for the Applicability of Galois Groups,
Nonlinear Phenomena in Complex System **9** (2006) 183-187.

Die Gleichung vierten Grades wird durch Ferraris Formeln gelöst, die aber schon so kompliziert sind, dass die meisten Profs und Studies bei ihnen ausrasten.

Grundlage der Ferrari-Formeln ist die Gruppe S_4 aller Vertauschungen der vier Lösungen x_1, x_2, x_3, x_4. Sobald zwischen diesen Lösungen Beziehungen bestehen wie $x_1x_3+x_2x_4 = 0$, gestatten die Lösungen nur die Vertauschungen einer Untergruppe von S_4. Das ermöglicht vereinfachte Lösungsformeln:

$$x_1 = \frac{-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_2}}{4} + \sqrt{\frac{a_3^2 - 2a_2 - a_3\sqrt{a_3^2 - 4a_2}}{8} - \frac{a_1}{\sqrt{a_3^2 - 4a_2}}}$$

$$x_2 = \frac{-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_2}}{4} + \sqrt{\frac{a_3^2 - 2a_2 + a_3\sqrt{a_3^2 - 4a_2}}{8} + \frac{a_1}{\sqrt{a_3^2 - 4a_2}}}$$

$$x_3 = \frac{-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_2}}{4} - \sqrt{\frac{a_3^2 - 2a_2 - a_3\sqrt{a_3^2 - 4a_2}}{8} - \frac{a_1}{\sqrt{a_3^2 - 4a_2}}}$$

$$x_4 = \frac{-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_2}}{4} - \sqrt{\frac{a_3^2 - 2a_2 + a_3\sqrt{a_3^2 - 4a_2}}{8} + \frac{a_1}{\sqrt{a_3^2 - 4a_2}}}$$

Die Bedeutung des Sätzchens ist folgende: In den Büchern über Algebra und Gruppen wird endlos schwadroniert, wie sehr man die Lösungen einer Gleichung vereinfachen kann, wenn man erst einmal die Gruppe dieser Gleichung kennt. Ob man aber der Gleichung ansehen kann, welche Gruppe sie gestattet, bleibt im Dunklen. Im günstigsten Fall wird empfohlen, die Gleichung numerisch zu lösen und dann die Gruppe anhand der Lösungen durch Probieren ausfindig zu machen. Damit wird das Problem nicht gelöst, sondern die Gruppentheorie zu einer Spielerei degradiert.

Das obige Sätzchen zeigt: Es ist möglich einer algebraischen Gleichung anzusehen, welche Gruppe zu ihr gehört, und zwar ohne sie zuvor zu lösen.

Es kommt noch dicker. Das Sätzchen gilt uneingeschränkt für komplexe Zahlen. In den meisten modernen Büchern über Algebra und Gruppen wird jedoch behauptet, die Gruppe einer algebraischen Gleichung habe etwas mit einem *Grundkörper* und seinen Erweiterungen zu tun. Letzlich kommen die Apologeten der *Körpertheorie* nur zu Stuhle, wenn ihnen eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten vorliegt. Das obige Sätzchen zeigt: Den Körperkult kann man sich sparen. Die Körpertheorie reagiert sich an Unwesentlichem ab, stellt Tautologien als Weisheiten dar und hilft nicht bei der Erschließung neuer Anwendungen.

Richtig ist: Die Gruppentheorie liefert nur ein Skelett, dessen Untersuchung die Gelenke der Lösungen aufzeigt. Will man die Lösungen wirklich ausrechnen, braucht man Muskeln auf dem Skelett, und die bekommt man von der *Funktionentheorie*.

Lösung einer algebraischen Gleichung bedeutet Berechnung der Umkehrfunktion, die im Allgemeinen vieldeutig ist: x_1, x_2, x_3 und x_4 sind die Zweige. Man hat also Riemannsche Blätter auszubreiten und sie so miteinander zu verknüpfen, wie es die Gruppe vorgibt. Das Interesse konzentriert sich auf die Verzweigungspunkte, von denen man sich mit der Körpertheorie überhaupt keinen Begriff machen kann.

Das, was ist hier schreibe, war den führenden Mathematikern gegen 1900 nach Christus bekannt. Danach trat Dekadenz ein. So soll ja auch die Alphabetisierung Europas um 1920 ihr Maximum erreicht haben.

Indessen könnte das obige Sätzchen neu sein. Es kann simpel mit funktionentheoretischen Methoden bewiesen werden. Auch für andere Untergruppen von S_3, S_4, S_5 usw. sind ähnliche Sätze beweisbar, so dass man für große Klassen algebraischer Gleichungen eine Tabelle voller leicht nachprüfbarer Kritieren und vereinfachter Lösungsformeln aufstellen kann.