Quantenelektrodynamik
Vorlesung im Sommersemester 2009

Ulrich Brosa, brosa-gmbh@t-online.de

April 23, 2009

1 Wie Planck seine Strahlungsformel fand

Planck, gelernter Thermodynamiker, wollte die kalorische Zustandsgleichung $U(T,V)$ der elektrodynamischen Strahlung bestimmen, die in einem Hohlraum wabert. U bedeutet die innere Energie der Strahlung, T und V Temperatur und Volumen des Hohlraums, mit dem die Strahlung ins Gleichgewicht geraten ist. Den Menschen vor Planck war diese Zustandsgleichung nur in zwei Grenzfällen bekannt:

$$U = AVT \qquad \text{für} \qquad T \to \infty \tag{1}$$

$$U = CV \exp(-B/T) \qquad \text{für} \qquad T \to 0 \ . \tag{2}$$

Darin bedeuten A, B und C drei Funktionen, die *nicht* von T und V abhängen, also in der Thermodynamik als Konstanten anzusehen sind.

Plancks Grundlage war die Fundamentalgleichung der Thermodynamik

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V}{T} \tag{3}$$

für den Zusammenhang zwischen Entropie S, innerer Energie und dem Arbeitsdifferenzial $p\,\mathrm{d}V$ mit dem Druck p. Aus ihr folgt einerseits, dass die natürlichen Variablen der Entropie das Volumen und die innere Energie (nicht die Temperatur) sind, andererseits der Zusammenhang zwischen innerer Energie und Temperatur

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \ . \tag{4}$$

Da in den damaligen Experimenten mit Hohlraumstrahlung das Volumen nicht verändert wurde, ist die partielle Ableitung als totale anzusehen. Die

Grenzgleichungen der kalorischen Zustandgleichungen (1) und (2) müssen also nach $1/T$ aufgelöst

$$\frac{1}{T} = \frac{AV}{U} \qquad U \to \infty \tag{5}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{B} \ln \frac{CV}{U} \qquad U \to 0 \tag{6}$$

und in (4) eingesetzt werden:

$$\frac{\partial S_\infty}{\partial U} = \frac{AV}{U} \tag{7}$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial U} = \frac{1}{B} \ln \frac{CV}{U} \ . \tag{8}$$

Die letzte Gleichung war Planck wegen des Logarithmus zu kompliziert. Er differenzierte die Entropie nochmals nach der inneren Energie, bildete die Kehrwerte

$$\left(\frac{\partial^2 S_\infty}{\partial U^2}\right)^{-1} = \frac{-U^2}{AV} \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial U^2}\right)^{-1} = -BU \tag{10}$$

und konnte so leicht eine Gleichung aufschreiben, die für alle innere Energien gilt:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right)^{-1} = -BU - \frac{U^2}{AV} \ . \tag{11}$$

Für kleine Temperaturen, d.h. für kleine innere Energien dominiert der erste Summand; der zweite kann vernachlässigt werden. Für große U ist es umgekehrt. Gleichung (11) ist eigentlich schon das Plancksche Strahlungsgesetz.

Der Rest ist elementares Rechnen. Planck bildete den Kehrwert von (11)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{-1}{BU + U^2/AV} \tag{12}$$

und zerlegte die rechte Seite nach Parzialbrüchen wie im Anfängerkurs für Mathematik

$$\frac{-1}{BU + U^2/AV} = \frac{-AV}{U(U + ABV)} = \frac{1}{B}\Big(\frac{1}{U + ABV} - \frac{1}{U}\Big) \ . \tag{13}$$

Damit lässt sich (12) integrieren, ebenfalls wie in der Anfängervorlesung für Mathematik

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{B} \ln \frac{U + ABV}{U} + const \ . \tag{14}$$

Die Integrationskonstante *const* muss 0 gesetzt werden, weil sich sonst das richtige Grenzverhalten (1) nicht ergibt. Aus (14) und (4) folgt

$$\frac{B}{T} = \ln\left(1 + \frac{ABV}{U}\right) \tag{15}$$

und aufgelöst nach der inneren Energie

$$U = \frac{ABV}{\exp(B/T) - 1} \ . \tag{16}$$

Vor 1900, also bevor M.Planck's berühmt gewordene Arbeit in Dtsch. phys. Ges. Berlin (1900) 202 erschien, hatten Rayleigh und Jeans die Funktion A bereits berechnet

$$A = \frac{\omega^2 \Delta\omega\, k}{\pi^2 c^3} \ . \tag{17}$$

Darin bedeuten ω die Frequenz der Strahlung, $\Delta\omega$ die Breite des Frequenzbandes um ω, in dem gemessen wird, k die Boltzmann-Konstante und c die Lichtgeschwindigkeit. Von der Funktion B war bekannt, dass sie linear mit ω variierte; man nannte das Wiensches Verschiebungsgesetz

$$B = \frac{\hbar\omega}{k} \ , \tag{18}$$

wobei vor Planck natürlich niemand die darin vorkommende Konstante $\hbar$ und Plancksches Wirkungsquantum nannte. Werden (17) und (18) in (16) eingesetzt, kommt das Plancksche Strahlungsgesetz in moderner Schreibweise heraus

$$U = \frac{\hbar\omega^3 \Delta\omega\, V/\pi^2 c^3}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \ . \tag{19}$$

Man könnte Plancks Überlegungen als Kinderkram verlästern. Doch besteht die größte wissenschaftliche Leistung gerade darin, mit möglichst einfachen Methoden möglichst übersichtliche Ergebnisse zu finden. Plancks Vorgehensweise ist keineswegs exotisch. Vielmehr gehört es zu den wichtigsten Anwendungen der Thermodynamik, die Zustandsfunktionen aus ein paar bekannten Daten allgemein zu konstruieren. Da Plancks Methode auf viele andere Probleme angewandt werden kann, lohnt es sich sie verstanden zu haben.